

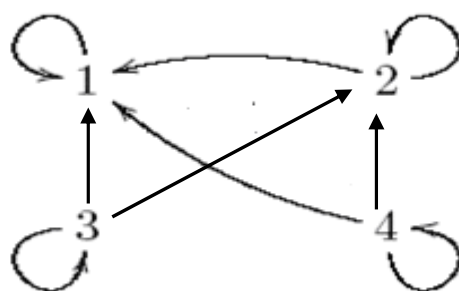
Definição 1.1.9: (Relação de ordem parcial)

Uma relação binária reflexiva, anti-simétrica e transitiva diz-se uma **relação de ordem parcial**. “r.o.p.”

Exemplo:

① $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 2), (2, 1), (4, 1), (3, 2), (3, 1)\}$$



② $\mathbb{N}$ com a relação $\leq$ definida por,

$n \leq m$ se e só se n é menor ou igual a m , $n, m \in \mathbb{N}$

- As relações de ordem parcial são usualmente designadas por $\leq$
 $x \leq y \Leftrightarrow (x, y) \in \leq$ (x está em relação com y)

- Se $\leq$ é uma r.o.p em X . Dois elementos x e $y \in X$ dizem-se **comparáveis** se

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Escrevemos $x < y$ para significar $x \leq y$ e $x \neq y$.

Se $\leq$ é uma r.o.p. em X e todos os elementos de X são comparáveis então $\leq$ diz-se uma **relação de ordem total** (r.o.t.)

Definição 1.1.10: (Conjunto parcialmente /totalmente ordenado)

Se X é um conjunto e $\leq$ é uma r.o.p. em X . Então:

- (1) O par $(X, \leq)$ diz-se um **conjunto parcialmente ordenado** (c.p.o.)
- (2) Se a relação $\leq$ for de ordem total então $(X, \leq)$ diz-se um **conjunto totalmente ordenado** (c.t.o.)
ou uma **cadeia**

Exemplos:

1

Seja $\leq$ a relação de ordem usual em $\mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, \leq)$ é uma cadeia.

$(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ são cadeias (para a ordem usual).

2

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$P(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Defina-se em $P(X)$ a relação binária dada por: Para A, B em $P(X)$

$$A \leq B \iff A \subseteq B$$

Reflexiva? $A \in \mathcal{P}(X)$

Ora, $A \leq A$ pois $A \subseteq A$

Anti-simétrica? $A, B \in \mathcal{P}(X)$

Suponha-se que $A \leq B$ e $B \leq A$.

$$\begin{array}{ccc} \Updownarrow & & \Updownarrow \\ A \subseteq B & B \subseteq A & \text{Assim, } A = B \end{array}$$

Transitiva? $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$

Suponha-se que $A \leq B$ e $B \leq C$.

$$\begin{array}{ccc} \Updownarrow & & \Updownarrow \\ A \subseteq B & B \subseteq C & \end{array}$$

Assim,

$$A \subseteq B \subseteq C, \text{ logo}$$

$$A \subseteq C \Leftrightarrow A \leq C.$$

$$(P(X), \leq)$$

é um c.p.o.

$$(P(X), \leq)$$

não é c.t.o.

③ Em $\mathbb{N}$ definimos a relação de divisibilidade por:

$$a \leq b \iff a|b \text{ (} a \text{ divide } b, \text{ i.e. } \exists c \in \mathbb{N} \text{ } ac = b),$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Então, $(\mathbb{N}, |)$ é um c.p.o.
(não é c.t.o.)

Observação:

$$3|9$$

$$3|3$$

$$2|10$$

7 e 8 não comparáveis